Exercice 169)

Méthode de la figure auxiliaire

Nous commençons par écrire le système d'équations non linéaires suivant:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} = m_a \qquad (*)$$

$$bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = s_a^2. \qquad (**)$$

Nous appelons

$$\left.\begin{aligned} b^2+c^2 &= q^2 \\ bc &= \ell^2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow (b+c)^2 = q^2+2\ell^2 \therefore b+c = \sqrt{q^2+2\ell^2} = s.$$

Pour trouver b et c nous devons donc résoudre le système

$$\begin{cases} b+c = \sqrt{q^2+2\ell^2} = s \\ bc = \ell^2 \end{cases}$$

Par conséquent, b et c pourront être obtenus graphiquement si nous pouvons construire q^2 et ℓ^2.

De $(*)$, nous tirons

$$b^2+c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = q^2.$$

De $(**)$, nous tirons

$$\ell^2 - \frac{a^2\ell^2}{q^2+2\ell^2} = s_a^2$$

$$(\ell^2)^2 + \frac{1}{4}(4m_a^2 - 4s_a^2 - a^2)\ell^2 - \frac{1}{4}(4m_a^2 + a^2)s_a^2 = 0. \qquad (\dagger)$$

Donc q^2 et ℓ^2 peuvent être construits!

Application numérique: soient $a = 5\,\text{cm}$, $m_a = \frac{\sqrt{201}}{2}\,\text{cm}$ et $s_a = \frac{8\sqrt{7}}{3}\,\text{cm}$.

Évidemment, les constructions avec règle et compas pour obtenir q^2 et ℓ^2 sont longues et introduiront des imprécisions (erreurs de construction). Nous allons plutôt calculer q^2 et ℓ^2 algébriquement.

Avec les données, nous obtenons $q^2 = 113$ et l'équation (†) devient:

$$(\ell^2)^2 - \frac{52}{9}\ell^2 - \frac{25312}{9} = 0 \implies \ell^2 = 56.$$

Ayant calculé q^2 et ℓ^2, la détermination de b et c est immédiate:

$$\begin{cases} b + c = \sqrt{q^2 + 2\ell^2} = s = 15 \\ bc = \ell^2 = 56 \end{cases} \tag{‡}$$

Algébriquement, nous obtenons

$$b^2 - 15b + 56 = 0 \implies \begin{cases} b_1 = 7\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_1 = 8\,\text{cm} \\ b_2 = 8\,\text{cm} \quad \text{et} \quad c_2 = 7\,\text{cm}. \end{cases}$$

Pour résoudre graphiquement le système (‡), nous construisons la figure auxiliaire suivante (voir figure 69):

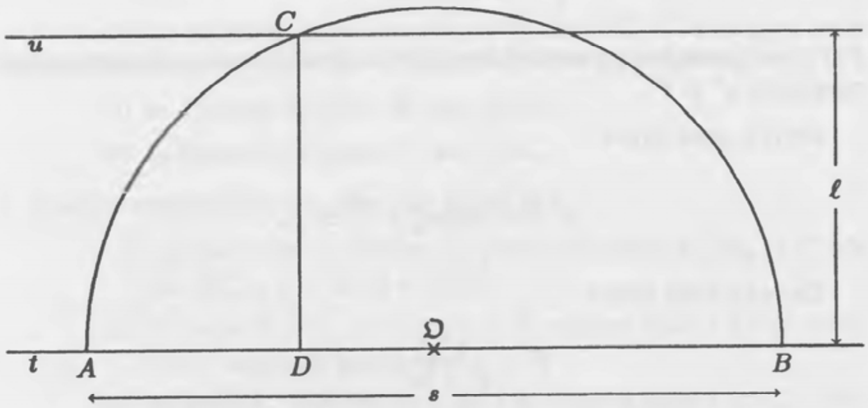

Figure 69

$\overline{DA} = b \qquad \overline{DB} = c$

Discussion: le problème possède 0 ou 1 solution.